

2016年文系第1問



1 1から10までの自然数が1つずつ書かれた10個の玉が袋に入っている。この袋から5個の玉を同時に取り出す。取り出した5個の玉に書かれた数を小さい方から順に X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $X_3 = 3$ となる確率を求めよ。
 (2) $X_5 - X_1 = 7$ となる確率を求めよ。
 (3) X_1 が X_3 の約数となり、かつ X_3 が X_5 の約数となる確率を求めよ。

(1) $1 \leq X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5$ より、

$$X_3 = 3 \text{ のとき, } X_1 = 1, X_2 = 2$$

よって、1, 2, 3 の玉と 4~10 の中から2つの玉を取り出せばよい。
 ← 71個.

$$\therefore \text{確率は} \frac{{}^7C_2}{{}^{10}C_5} = \frac{21}{252} = \frac{1}{12} //$$

(2) $X_5 - X_1 = 7$ となるのは、 $(X_1, X_5) = (1, 8), (2, 9), (3, 10)$ のとき

$(X_1, X_5) = (1, 8)$ のとき、 X_2, X_3, X_4 は 2~7 の中から3つ選ぶので、 ${}^6C_3 = 20$ 通り

同様にして、他の場合も各20通りあるので
 ← 61個.

$$\frac{20 \times 3}{{}^{10}C_5} = \frac{60}{252} = \frac{5}{21} //$$

(3) $X_1 < X_3 < X_5$ と $X_3 \geq 3, X_5 \geq 5$ に注意すると

$$X_5 = 10 \text{ のとき, } (X_1, X_3) = (1, 5)$$

$$X_5 = 9 \text{ のとき, } (X_1, X_3) = (1, 3)$$

$$X_5 = 8 \text{ のとき, } (X_1, X_3) = (2, 4), (1, 4)$$

$$X_5 = 7 \text{ のとき, なし}$$

$$X_5 = 6 \text{ のとき } (X_1, X_3) = (1, 3)$$

$$X_5 = 5 \text{ のとき, なし}$$

それぞれ何通りあるかを求めると、

$$(X_1, X_3, X_5) = (1, 5, 10) \cdots {}^3C_1 \times {}^4C_1 = 12 \text{ 通り} \quad (1, 3, 9) \cdots {}^5C_1 = 5 \text{ 通り}$$

$$(2, 4, 8) \cdots {}^3C_1 = 3 \text{ 通り}, (1, 4, 8) \cdots {}^2C_1 \times {}^3C_1 = 6 \text{ 通り}$$

$$(1, 3, 6) \cdots {}^2C_1 = 2 \text{ 通り}$$

$$\therefore \text{以上より, } \frac{12+5+3+6+2}{{}^{10}C_5} = \frac{28}{252} = \frac{1}{9} //$$