



2015年理系第3問

3 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、関数 $f_n(x) = x^{n+1}(1-x)$ を考える。

- (1) 曲線 $y = f_n(x)$ 上の点 $(a_n, f_n(a_n))$ における接線が原点を通るとき、 a_n を n の式で表せ。ただし、 $a_n > 0$ とする。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、曲線 $y = f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また、(1) で求めた a_n に対して、 $0 \leq x \leq a_n$ の範囲で、曲線 $y = f_n(x)$ 、 x 軸、および直線 $x = a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。 B_n および C_n を n の式で表せ。
- (3) (2) で求めた B_n および C_n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい。