0002081818197999

宮城教育大学

2015年 教育学部（中等数学） 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{x}{(2x-1)(x-2)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $g(x)=2x^3-6x+5$ とする．このとき，$-3<\alpha<-1$ かつ $g(\alpha)=0$ をみたす α が存在することを示せ．さらに，$x<\alpha$ では $g(x)<0$ であり，$x>\alpha$ では $g(x)>0$ であることを示せ．

(2) (1)の α を用いて，関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(1) $g'(x)=6x^2-6$

$\quad =6(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	9	↘	1	↗

極大　極小

増減表は右のようになる．

∴ $-3<x<-1$ において，$g(x)$ は単調増加で

$g(-3)=2\cdot(-3)^3-6\cdot(-3)+5=-31<0$，$g(-1)=2\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)+5=9>0$

∴ $g(x)$ は連続な関数より，$-3<\alpha<-1$ かつ $g(\alpha)=0$ となる α が存在する．

$x<\alpha$ において，$g(x)$ は単調増加で，$g(\alpha)=0$ なので，$x<\alpha$ では $g(x)<0$

$\alpha<x<-1$ において．$g(x)$ が単調増加で $g(\alpha)=0$ であることと，増減表より，$g(1)=1>0$

∴ $x>\alpha$ では．$g(x)>0$ ▨

(2) $f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-2)-x(4x-5)}{(2x-1)^2(x-2)^2}=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(2x-1)^2(x-2)^2}$

$$f''(x)=\frac{-4x(2x-1)^2(x-2)^2+2(x+1)(x-1)\cdot\{2\cdot2(2x-1)(x-2)^2+(2x-1)^2\cdot2(x-2)\}}{(2x-1)^4(x-2)^4}$$

$$=\frac{-4x(2x-1)(x-2)+2(x+1)(x-1)(8x-10)}{(2x-1)^3(x-2)^3}$$

$$=\frac{4(2x^3-6x+5)}{(2x-1)^3(x-2)^3}$$

∴ (1)より，$f''(x)=0$ となるのは．$x=\alpha$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}f(x)=\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to2-0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to2+0}f(x)=\infty$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	／	$+$	0	$-$	／	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	／	$-$		$-$	／	$+$
$f(x)$	↘		↘	$-\frac{1}{9}$	↗	／	↗	-1	↘	／	↘

極小　極大