2015年 工学部 第3問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{3}$ aを定数とし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$とする．媒介変数tを用いて

$$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線をCとする．また，Cの$0 \leqq t \leqq a$の部分の長さをLとする．

(1) Lをaを用いて表せ．ただし，Lは$L=\displaystyle\int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$と表される．

(2) 曲線C上の点$\mathrm{P}(\cos^3 a,\ \sin^3 a)$における接線$\ell$の方程式を求めよ．また，$\ell$と$x$軸の交点$\mathrm{Q}$の座標を求めよ．

(3) (2)の2点P，Q間の距離をMとするとき，$L=\dfrac{3}{2}M$が成り立つことを示せ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t\cos^2 t$, $\dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$

$$\therefore L=\int_0^a \sqrt{(-3\sin t\cos^2 t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^a \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$

$$=3\int_0^a \sin t\cos t\,dt \qquad \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\text{ より. } \sin t>0,\ \cos t>0\right)$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^a \sin 2t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^a$$

$$=\underline{\frac{3}{4}(1-\cos 2a)}\ //$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\tan t$　　$\therefore \ell:\ y=-\tan a\,(x-\cos^3 a)+\sin^3 a$

$$\therefore \underline{\ell:\ y=-(\tan a)\cdot x+\sin a}\ //$$

$0=-(\tan a)\cdot x+\sin a$ より $x=\cos a$　　$\therefore \underline{\mathrm{Q}(\cos a,\ 0)}\ //$

2枚目につづく

2015年 工学部 第3問 2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ aを定数とし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$とする．媒介変数tを用いて

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線をCとする．また，Cの$0 \leqq t \leqq a$の部分の長さをLとする．

(1) Lをaを用いて表せ．ただし，Lは$L = \displaystyle\int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$と表される．

(2) 曲線C上の点$\mathrm{P}(\cos^3 a,\ \sin^3 a)$における接線$\ell$の方程式を求めよ．また，$\ell$と$x$軸の交点$\mathrm{Q}$の座標を求めよ．

(3) (2)の2点P，Q間の距離をMとするとき，$L = \dfrac{3}{2}M$が成り立つことを示せ．

(3) $\dfrac{3}{2}M = \dfrac{3}{2}\sqrt{(\cos^3 a - \cos a)^2 + (\sin^3 a - 0)^2}$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{\cos^2 a\,(\cos^2 a - 1)^2 + \sin^6 a}$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{\cos^2 a \cdot \sin^4 a + \sin^6 a}$

$= \dfrac{3}{2} \cdot \sin^2 a \underbrace{\sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a}}_{=1}$　$(\because\ \sin a > 0)$

$= \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

$= \dfrac{3}{4}(1 - \cos 2a)$

$= L$ ▨