2015年 工学部 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{\text{I}}$, $\boxed{\text{II}}$ に答えよ.

$\boxed{\text{I}}$ 次の5つの定積分を求めよ.（$\boxed{\text{II}}$(4) で用いる.）

$$I_1 = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx,\quad I_2 = \int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx,\quad I_3 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} x\cos x\sin x\,dx,\quad I_5 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\cos x\,dx$$

$\boxed{\text{II}}$ 関数 $y = \sin x$ のグラフを曲線 C とする．C 上の点 O(0, 0) における接線を ℓ_1，点 A(π, 0) における接線を ℓ_2 とする．

ℓ_1 と ℓ_2 の交点を B，C 上の点 P(t, $\sin t$) ($0 \leqq t \leqq \pi$) から ℓ_1 に下ろした垂線を PQ とする．ただし，$t = 0$ のときは Q = P とする．OQ = s とおく．

(1) ∠OBA の大きさを求めよ．

(2) s を t を用いて表せ．

(3) 線分 PQ の長さを t を用いて表せ．

(4) 曲線 C と 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分を，直線 ℓ_1 の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\text{I}}$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx$$
$$= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\,dx$$
$$= \pi - \Big[-\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$= \underline{\pi}\ //$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} x^2(\sin x)'\,dx$$
$$= \Big[x^2\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\sin x\,dx$$
$$= -2I_1$$
$$= \underline{-2\pi}\ //$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$= \underline{\frac{\pi}{2}}\ //$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}x\sin 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x(-\cos 2x)'\cdot\frac{1}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\Big[-x\cos 2x\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} -\cos 2x\,dx$$
$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$
$$= \underline{-\frac{\pi}{4}}\ //$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} (\sin x)'\sin^2 x\,dx$$
$$= \Big[\sin^3 x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\cdot 2\sin x\cos x\,dx$$
$$= -2I_5$$
$$\therefore\ \underline{I_5 = 0}\ //$$

0001978901208999

名古屋工業大学

2015年 工学部 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{\text{I}}$, $\boxed{\text{II}}$ に答えよ．

$\boxed{\text{I}}$ 次の5つの定積分を求めよ．($\boxed{\text{II}}$ (4) で用いる．)

$$I_1 = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx,\quad I_2 = \int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx,\quad I_3 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} x\cos x\sin x\,dx,\quad I_5 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\cos x\,dx$$

$\boxed{\text{II}}$ 関数 $y=\sin x$ のグラフを曲線 C とする．C 上の点 O(0, 0) における接線を ℓ_1，点 A(π, 0) における接線を ℓ_2 とする．

ℓ_1 と ℓ_2 の交点を B，C 上の点 P(t, $\sin t$) ($0 \leqq t \leqq \pi$) から ℓ_1 に下ろした垂線を PQ とする．ただし，$t=0$ のときは Q = P とする．OQ = s とおく．

(1) ∠OBA の大きさを求めよ．

(2) s を t を用いて表せ．

(3) 線分 PQ の長さを t を用いて表せ．

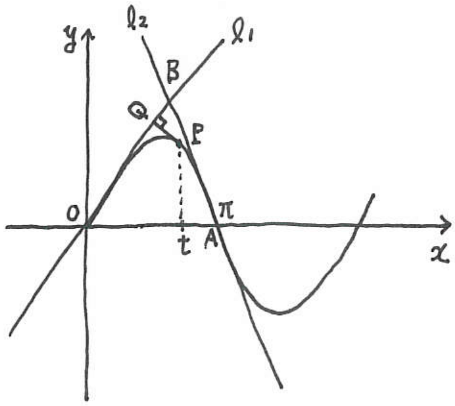
(4) 曲線 C と2直線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分を，直線 ℓ_1 の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(1) $y' = \cos x$ より．

ℓ_1 の傾きは．$\cos 0 = 1$，

ℓ_2 の傾きは．$\cos\pi = -1$

$\therefore$ $\ell_1 \perp \ell_2$ より．$\underline{\angle OBA = 90^\circ}$ //



(2) PQ：$y = -(x-t) + \sin t$

これと $y=x$ の交点は Q$\left(\dfrac{t+\sin t}{2}, \dfrac{t+\sin t}{2}\right)$

$\therefore$ $s = \sqrt{2}\cdot\dfrac{t+\sin t}{2}$　　$\therefore$ $\underline{s = \dfrac{t+\sin t}{\sqrt{2}}}$ //

(3) 点Pと ℓ_1 とのキョリが PQ に等しいので　$PQ = \dfrac{|t-\sin t|}{\sqrt{1+1}} = \underline{\dfrac{|t-\sin t|}{\sqrt{2}}}$ //

(4) $V = \pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} PQ^2\,ds$　(ℓ_1 を軸にとる)

(2)より

$ds = \dfrac{1+\cos t}{\sqrt{2}}\cdot dt$

s	$0 \to \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
t	$0 \to \pi$

$= \pi\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{(t-\sin t)^2}{2}\cdot\dfrac{1+\cos t}{\sqrt{2}}\,dt$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi\left\{\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t + t^2\cos t - 2t\sin t\cos t + \sin^2 t\cos t\,dt\right\}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi\left\{\dfrac{\pi^3}{3} - 2I_1 + I_3 + I_2 - 2I_4 + I_5\right\}$

$\therefore$ $\underline{V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi^2(\pi^2 - 9)}$ //