



2014年理学部(数)第4問

4  $\alpha$  を実数とする. 2つの関数  $f(x) = e^{-x}(\sin x - \cos x)$  と  $g(x) = \alpha e^{-x}$  について, 次の問いに答えよ.

- (1)  $\int f(x) dx = -e^{-x} \sin x + C$  であることを示せ. ただし,  $C$  は積分定数である.  
 (2) すべての  $x \geq 0$  について  $f(x) \leq g(x)$  が成り立つような  $\alpha$  の値の最小値を求めよ.  
 (3)  $\alpha$  を (2) で求めた最小値とする. 曲線  $y = f(x)$  ( $x \geq 0$ ) と曲線  $y = g(x)$  ( $x \geq 0$ ) との共有点の  $x$  座標を小さい方から順に  $a_0, a_1, a_2, \dots$  とし,  $n$  が自然数であるとき,

$$S_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \left\{ g(x) - \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \right\} dx$$

とする. このとき,  $S_n$  を求めよ.

- (4) (3) で求めた  $S_n$  について, 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$  の和を求めよ.