0001866813318999

鳥取大学

2014年 地域 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 自然数nに対して，1から$2n$までのすべての自然数を次の条件（ア）および（イ）を満たすように並べた順列$[i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ \cdots,\ i_{2n-1},\ i_{2n}]$の総数を$f(n)$とする．

（ア） $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$に対して$i_{2k-1}<i_{2k}$

（イ） $n \geqq 2$ならば$i_1<i_3<\cdots<i_{2n-1}$

たとえば$n=1$のとき条件（ア）を満たす順列は$[1,\ 2]$のみであるから$f(1)=1$となる．

(1) $f(2)$, $f(3)$を求めよ．

(2) $n=2,\ 3,\ \cdots$とするとき，$f(n)$と$f(n-1)$の間の関係式を求めよ．

(3) $f(n)$を求めよ．

(1) $n=2$のとき．$[1,2,3,4]$, $[1,3,2,4]$, $[1,4,2,3]$ の3通り

よって $f(2)=3$ //

$n=3$のとき．$i_1=1$でなければならない $i_2=2$となるのは．

$[1,2,3,4,5,6]$, $[1,2,3,5,4,6]$, $[1,2,3,6,4,5]$

同様に，
$[1,3,2,4,5,6]$, $[1,3,2,5,4,6]$, $[1,3,2,6,4,5]$
$[1,4,2,3,5,6]$, $[1,4,2,5,4,6]$, $[1,4,2,6,3,5]$
$[1,5,2,3,4,6]$, $[1,5,2,4,3,6]$, $[1,5,2,6,3,4]$
$[1,6,2,3,4,5]$, $[1,6,2,4,3,5]$, $[1,6,2,5,3,4]$

$\therefore f(3)=15$ //

(2) $i_1=1$なので$i_2=m\ (2 \leqq m \leqq 2n)$の各場合に$i_3, i_4, \cdots, i_{2n}$の大小関係を$n-1$の場合と同じになるように作ればよい

$\therefore f(n)=(2n-1)f(n-1)$ //

$([1,2,\underline{3,5,4,6}] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} [\underline{1,3,2,4}]$

大小関係は同じ

(3) $\therefore \dfrac{f(n)}{f(n-1)}=2n-1 \quad (n \geqq 2)$ $\quad \therefore \dfrac{f(n)}{f(n-1)} \times \dfrac{f(n-1)}{f(n-2)} \times \cdots \times \dfrac{f(2)}{f(1)}=(2n-1)(2n-3)\cdots 3$

$\therefore \dfrac{f(n)}{f(1)}=\dfrac{(2n-1)!}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\cdots 2}=\dfrac{(2n-1)!}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}$ $\quad \therefore f(n)=\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ //

形をととのえた．このままでも可．