

2017年医(医)第2問

1枚目/2

増田

2 xy 平面において、 $kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 = 0$ で表される円 C があるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 k は正の実数とする。

- (1) k の値によらず円 C が通る定点 A, B を求めよ。
 (2) 円 C の中心 D と点 $E(1, 5)$ を結ぶ線分 DE の長さが最小となるときの k の値と、そのときの円 C の半径 r を求めよ。
 (3) k を (2) で求めた値とする。円 C 上の点 Q と点 $E(1, 5)$ を結ぶ線分 QE の中点を P とする。点 Q が円 C 上を動くとき、 $\triangle ABP$ の面積の最大値を求めよ。

(1) 与式 (*) を変形

$$k(x^2 + y^2 - 4) + (x - y + 1) = 0$$

これが k の値によらず成り立つには、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \dots \textcircled{1} \\ x - y + 1 = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

であればよい。

定点 A, B は $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ が表す図形の交点。

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入して、

$$x^2 + (x+1)^2 - 4 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \quad y = x + 1 = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

求める A, B の座標は $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ //

(2) (*) を変形すると

$$k\left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + k\left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} + 4k - 1 \dots (**)$$

円 C の中心 D は $\left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$ つまり直線 $x + y = 0$ 上にある。

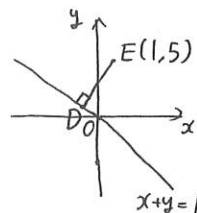
線分 DE が最小となるのは $ED \perp OD$ のとき。

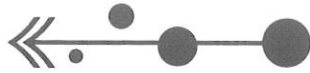
$$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \text{ より } \left(-\frac{1}{2k} - 1, \frac{1}{2k} - 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right) = 0$$

$$1 + 2k + 1 - 10k = 0$$

$$k = \frac{1}{4} \#$$

そのとき円 C の半径は (***) より $r = \sqrt{\frac{1}{2k^2} + 4 - \frac{1}{k}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \#$





2017年医(医)第2問

2枚目/2

増田

2 xy 平面において、 $kx^2 + ky^2 + x - y - 4k + 1 = 0$ で表される円 C があるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 k は正の実数とする。

- (1) k の値によらず円 C が通る定点 A, B を求めよ。
- (2) 円 C の中心 D と点 $E(1, 5)$ を結ぶ線分 DE の長さが最小となるときの k の値と、そのときの円 C の半径 r を求めよ。
- (3) k を (2) で求めた値とする。円 C 上の点 Q と点 $E(1, 5)$ を結ぶ線分 QE の中点を P とする。点 Q が円 C 上を動くとき、 $\triangle ABP$ の面積の最大値を求めよ。

(3) $k = \frac{1}{4}$ のとき、円 C は $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$

点 Q の座標を (a, b) とおくと

$$(a+2)^2 + (b-2)^2 = 8 \quad \text{--- (3)}$$

点 P は EQ の中点なので、 $P\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$ とおく。

$$a = 2x - 1, \quad b = 2y - 5 \quad \text{を (3) に代入して}$$

$$(2x+1)^2 + (2y-7)^2 = 8$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = 2$$

よって点 P は 点 $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の円の軌跡上にある。

$\triangle ABP$ の面積が最大となるのは、 (PF) を通る直線 \perp (AB) を通る直線 のときである。

点 F から直線 $x - y + 1 = 0$ に下ろした垂線の長さは

$$\frac{|-\frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 1|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

また線分 AB の長さは

$$\sqrt{7+7} = \sqrt{14}$$

$$\triangle ABP \text{ の面積の最大値は } \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

