鳥取大学

2016年医（医）第1問

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ を以下のように定める．

$$1^2,\ 1^2+3^2,\ 1^2+3^2+5^2,\ \cdots,\ 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2,\ \cdots$$

また，数列 $\{b_n\}$ を以下のように定める．

$$2^2,\ 2^2+4^2,\ 2^2+4^2+6^2,\ \cdots,\ 2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2,\ \cdots$$

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n-b_n\}$ の第 n 項を n を用いて表せ．

(3) $c_n=a_{n+1}-b_n$ とおくとき，c_n が 6 の倍数となるための n の条件を求めよ．

(1) $a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\underline{\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)}$ //

(2) (1)と同様にして，

$b_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$

$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore\ a_n-b_n=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

$=\underline{-n(2n+1)}$ //

(3) $c_n=a_{n+1}-a_n+a_n-b_n$

$=(2n+1)^2+\{-n(2n+1)\}$

$=(n+1)(2n+1)$

$2n+1$ は奇数なので，c_n が6の倍数のとき，$n+1$ は偶数 すなわち n は奇数である．

(i) $n=6k+1$ のとき

$c_n=(6k+2)(12k+3)=6(3k+1)(4k+1)$

$\therefore$ c_n は6の倍数

(ii) $n=6k+3$ のとき

$c_n=(6k+4)(12k+7)$

$=6(12k^2+15k+4)+4$

$\therefore$ c_n は6の倍数ではない

(iii) $n=6k+5$ のとき

$c_n=(6k+6)(12k+11)$

$=6(k+1)(12k+11)$

$\therefore$ c_n は6の倍数

(i)〜(iii)より，$\underline{n\text{を6で割った余りが1または5}}$ //