鳥取大学

2016年 地域 第4問

$\boxed{4}$ xy 平面上に 2 点 A(0, 1), B(−2, 0) と円 $C : x^2+y^2-2y=0$, および直線 $\ell : y=kx+2k$ がある. ただし, k は実数とする.

(1) 点 A と直線 ℓ の距離を k を用いて表せ.

(2) 直線 ℓ と円 C が異なる 2 点で交わるように, k の値の範囲を求めよ.

(3) 直線 ℓ と円 C が異なる 2 点 P, Q で交わるとする. 線分 PQ について, $\mathrm{PQ}=2\sqrt{k}$ が成り立つとき, k の値を求めよ.

(4) (3)で求めた k に対する直線 ℓ と直線 AB のなす角を θ とする. このとき, $\tan\theta$ の値を求めよ. ただし, $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$ とする.

(1) $\ell : kx - y + 2k = 0$

∴ A と ℓ のキョリは, 点と直線のキョリ公式より, $\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$ //

(2) $C : x^2+(y-1)^2=1$ より, C の中心は A で, 半径は 1

∴ (1) で求めた値を d とおくと,

ℓ と C が異なる 2 点で交わる $\iff d < r = 1$

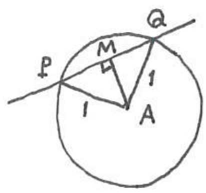
∴ $\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$ より, $|2k-1| < \sqrt{k^2+1}$

両辺を 2 乗して, $4k^2-4k+1 < k^2+1$ ∴ $k(3k-4)<0$ ∴ $0<k<\dfrac{4}{3}$ //

(3) △PAQ は AP = AQ = 1 の二等辺三角形より,

線分 PQ の中点を M とおくと, AM ⊥ PQ

また, $\mathrm{PM}=\sqrt{k}$, $\mathrm{AM}=\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$



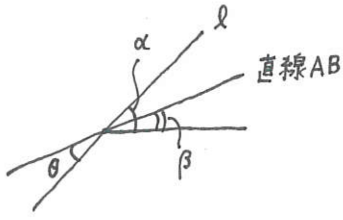
∴ 三平方の定理より, $(\sqrt{k})^2+\left(\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2=1^2$

∴ $k+\dfrac{4k^2-4k+1}{k^2+1}=1$ ∴ $k(k^2+3k-3)=0$ $0<k<\dfrac{4}{3}$ より, $k=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ //

$4<\sqrt{21}<5$ より, $0<\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}<\dfrac{4}{3}$

(4) $4<\sqrt{21}<5$ より. $k>\dfrac{1}{2}$ ∴ ℓ の傾きは $\dfrac{1}{2}$ より大きい

一方, 直線 AB の傾きは, $\dfrac{1-0}{0-(-2)}=\dfrac{1}{2}$



∴ 右図より, $\tan\theta = \tan(\alpha-\beta)$

$$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{k-\frac{1}{2}}{1+k\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2k-1}{k+2}$$

$$= \frac{2(k+2)-5}{k+2}$$

$$= 2-\frac{5}{k+2}$$

$$= 2-\frac{5}{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$$

$$= 2-\frac{10}{\sqrt{21}+1}$$

$$= \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$ //