

2016年人間科学学部（理系）第4問

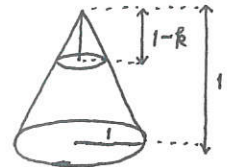
数理  
石井

4  $xy$  平面上の原点を中心とする単位円を底面とし、点  $P(t, 0, 1)$  を頂点とする円錐を  $K$  とする。  $t$  が  $-1 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき、円錐  $K$  の表面および内部が通過する部分の体積は  $\frac{\pi + \boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$  である。

$t$  を固定して、平面  $z = k$  で円錐  $K$  を切断したときの断面は、

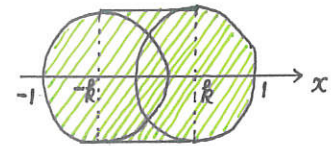
右図において円錐の相似比を考えると、

半径  $1-k$  の円であることがわかる。ただし、 $0 \leq k \leq 1$  である。



よって、 $t$  を  $-1 \leq t \leq 1$  の範囲で動かすと、右図のような

断面となり、この面積を  $S_{z=k}$  とおくと、



$$S_{z=k} = \underbrace{\pi \cdot (1-k)^2}_{\text{半円2つ分}} + \underbrace{2k \cdot 2(1-k)}_{\text{長方形}}$$

$$= \pi(k-1)^2 + 4k - 4k^2$$

$$\therefore V = \int_0^1 \pi(k-1)^2 + 4k - 4k^2 dk$$

$$= \left[ \frac{\pi}{3}(k-1)^3 + 2k^2 - \frac{4}{3}k^3 \right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{4}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi + 2}{3}$$