山口大学

2014年 第1問

$\boxed{1}$ 一般項が $a_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 正接の2倍角の公式 $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ を用いて，数列 $\{a_n\}$ の漸化式を求めなさい．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めなさい．

(1) 公式に $\theta = \frac{\pi}{2^{n+2}}$ を代入すると，$\tan\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}$

$$\therefore\ a_n = \frac{2a_{n+1}}{1-a_{n+1}^2}$$

$$\therefore\ a_n a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} - a_n = 0$$

$\therefore\ a_n > 0$ より，$\underline{a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n^2+1}-1}{a_n}}$ //

(2) (1)より，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n^2+1}-1}{a_n^2}$$

$$= \frac{a_n^2}{a_n^2(\sqrt{a_n^2+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_n^2+1}+1}$$

ここで $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$$= 0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n^2+1}+1}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}\ //$$