

2016年環境・経営第4問


 数理  
石井

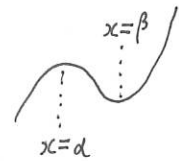
4 関数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$  について、以下の間に答えよ。ただし、 $a$  は定数である。

- (1)  $f(x)$  が極大値と極小値をもつような  $a$  のとり得る値の範囲を求めよ。  
 (2)  $f(x)$  が極大値と極小値をとるときの  $x$  の値をそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする。 $\alpha + \beta$  および  $\alpha\beta$  を  $a$  で表せ。  
 (3)  $f(x)$  の極大値と極小値の和が 0 となるとき、 $a$  の値を求めよ。

(1)  $f'(x) = 3x^2 + 6x + a \cdots (*)$

判別式を  $D$  とすると、 $D/4 = 3^2 - 3 \cdot a = 3(3-a)$

$f(x)$  が極大値と極小値をもつことから  $D > 0$  よて  $a < 3$  //



(2)  $\alpha, \beta$  は  $f'(x) = 0$  の解より

(\*) において解と係数の関係を考えて

$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = \frac{a}{3}$  //

(3) 極大値は  $f(\alpha)$ , 極小値は  $f(\beta)$  となるので

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + 3\alpha^2 + a\alpha + \beta^3 + 3\beta^2 + a\beta \\ &= \alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha^2 + \beta^2) + a(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + a(\alpha + \beta) \\ &= (-2)^3 - 3 \cdot \frac{a}{3} \cdot (-2) + 3\{(-2)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3}\} + a \cdot (-2) \\ &= -8 + 2a + 3\left(4 - \frac{2}{3}a\right) - 2a \\ &= -2a + 4 \end{aligned}$$

$\therefore$  和が 0 より、 $a = 2$  // これは (1) の条件をみたしている。