0001335274668999

2013年 工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bを定数とし，$a \neq 0$とする．関数$f(x)=ax^2-4x+b$は，条件

$$x^2f''(x)-xf'(x)+f(x)=x^2+8$$

を満たすとする．

(1) a, bの値を求めよ．

(2) 直線ℓが，放物線$y=x^2$の接線であり，かつ放物線$y=f(x)$の接線でもあるとき，ℓの方程式を求めよ．

(3) 2つの放物線$y=x^2$と$y=f(x)$，および(2)で求めた接線ℓで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x)=2ax-4$, $f''(x)=2a$ を代入して，

$x^2 \cdot 2a - x\cdot(2ax-4)+ax^2-4x+b = x^2+8$

$\therefore (a-1)x^2+b-8=0$ $\quad\therefore \underline{a=1,\ b=8}$ //

(2) ℓ と $y=x^2$ の接点を (s, s^2) とすると，接線は.

$y=2s(x-s)+s^2$ $\quad\therefore y=2sx-s^2 \cdots$ ①

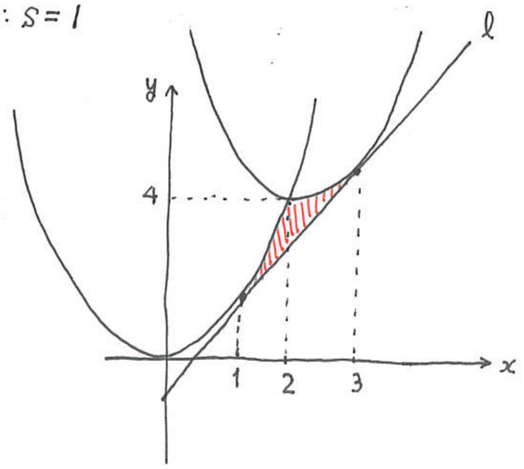
(1)より，$f(x)=x^2-4x+8$，$f'(x)=2x-4$

よって，ℓ と $y=f(x)$ の接点を (t, t^2-4t+8) とすると，接線は.

$y=(2t-4)(x-t)+t^2-4t+8$ $\quad\therefore y=(2t-4)x-t^2+8 \cdots$ ②

①と②の係数を比較して．$\begin{cases} 2s=2t-4 \\ -s^2=-t^2+8 \end{cases}$ $\quad\therefore s=1$

$\therefore \underline{y=2x-1}$ //



(3) $S=\displaystyle\int_1^2 x^2-(2x-1)\,dx + \int_2^3 x^2-4x+8-(2x-1)\,dx$

$=\displaystyle\int_1^2 (x-1)^2dx + \int_2^3 (x-3)^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_2^3$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}$

$=\underline{\dfrac{2}{3}}$ //