

2015年医学部第4問

$$\boxed{4} \text{ 関数 } f_1(x) = \frac{2}{1+e^x}, \log f_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f_1(t) dt, \log f_3(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x f_2(t) dt, \log f_4(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f_3(t) dt, \dots,$$

$$\log f_k(x) = \frac{(-1)^k}{2} \int_0^x f_{k-1}(t) dt \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

とする。ただし、 \log は自然対数である。また、

$$g_k(x) = f_k(x) \times \frac{x \sin x}{4 - \cos^2 x} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とする。さらに、

$$I_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \int_{-\pi}^{\pi} g_k(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{4 - \cos^2 x} dx,$$

$$K = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx$$

とする。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) $f_k(x)$ を積分を使わずに表せ ($k = 2, 3, 4, \dots$).
- (2) I_n を J で表せ ($n = 1, 2, 3, \dots$).
- (3) J を K で表せ.
- (4) I_n を求めよ ($n = 1, 2, 3, \dots$).