0002062097397999

学習院大学

2015年 理学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ （旧課程履修者）2次正方行列

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

に対して，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．

(1) $\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_4\\ y_4\end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) 一般項 x_n，y_n をそれぞれ n の式で表せ．

(1) $\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}}$ //

$\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}4\\ 4\end{pmatrix}}$ //

$\begin{pmatrix}x_4\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}9\\ 12\end{pmatrix}}$ //

(2) (1) と同様にして続きを求めると.

$\begin{pmatrix}x_5\\ y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ 16\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_6\\ y_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\ 36\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_7\\ y_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64\\ 64\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_8\\ y_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}129\\ 132\end{pmatrix}$

∴ n が奇数のとき. $x_n=y_n=2^{n-1}$，n が偶数のとき. $x_n=2^{n-1}+1$, $y_n=2^{n-1}+4$

と推測できる. これを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1, 2$ のとき. (1) より成り立つことが分かる.

(ii) $n=2k-1, 2k$ (k: 自然数) のとき成り立つと仮定する.

$\begin{pmatrix}x_{2k}\\ y_{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k-1}+1\\ 2^{2k-1}+4\end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix}x_{2k+1}\\ y_{2k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{2k-1}+1\\ 2^{2k-1}+4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3\cdot 2^{2k-1}+3-2^{2k-1}-4+1\\ 4\cdot 2^{2k-1}+4-2\cdot 2^{2k-1}-8+4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2^{2k}\\ 2^{2k}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_{2k+2}\\ y_{2k+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{2k}\\ 2^{2k}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2^{2k}-2^{2k}+1\\ 4\cdot 2^{2k}-2\cdot 2^{2k}+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}+1\\ 2^{2k+1}+4\end{pmatrix}$

∴ $n=2k+1, 2k+2$ のときも成り立つ.

(i). (ii) より. $\underline{n: 奇数のとき. x_n=y_n=2^{n-1},\quad n: 偶数のとき. x_n=2^{n-1}+1, y_n=2^{n-1}+4}$

$\underline{すべての自然数で成り立つ.}$ //