0002112907887999

長崎大学

2015年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 次の関係式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n と $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

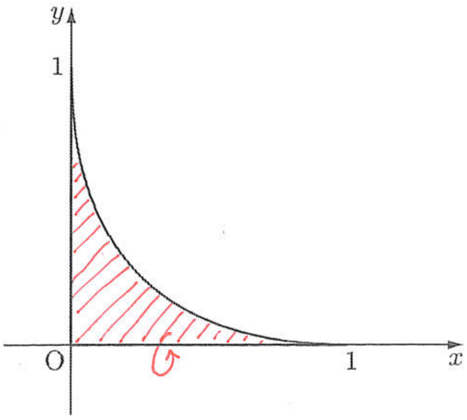
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

特性方程式
$\alpha - (\sqrt{2}+1)\alpha = 1$
$\therefore\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(3) 曲線 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた下図の図形を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ.



(1) $a_{n+1}+\frac{\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{2}+1)(a_n+\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= (\sqrt{2}+1)^2(a_{n-1}+\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\vdots$

$= (\sqrt{2}+1)^n(a_1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore\ a_n+\frac{\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{2}+1)^{n-1}\cdot(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore\ a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}$ //

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ // $\quad(\because\ \sqrt{2}+1>1)$

(2) (与式) $= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2}$

$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\log 2$ //

(3) $y = 1-2\sqrt{x}+x$

$\therefore\ V = \pi\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)^2\,dx$

$= \pi\int_0^1 1+4x+x^2-4\sqrt{x}+2x-4x\sqrt{x}\ dx$

$= \pi\left[x+3x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$

$= \pi\left(1+3+\frac{1}{3}-\frac{8}{3}-\frac{8}{5}\right)$

$= \frac{\pi}{15}$ //