2016年 スポーツ科学学部 第3問

$\boxed{3}$ 2つの箱A，Bがあり，いずれの箱にも赤球が1個，白球が3個入っている．ここで，「それぞれの箱から1個の球を無作為に取り出しそれらを交換する」という試行を n 回繰り返す．その結果，2つの箱A，Bがともに元の状態に戻っている確率を p_n とする．このとき，正の整数 k に対して，

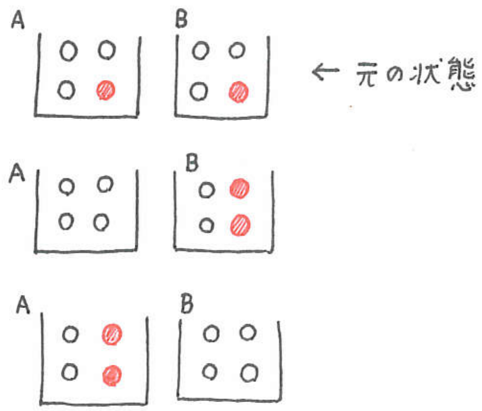
$$p_{k+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}\ 5}{\boxed{\text{キ}}\ 8}p_k + \frac{\boxed{\text{ク}}\ 1}{\boxed{\text{ケ}}\ 2}(1 - p_k)$$

となる．よって，

$$p_n = \frac{\boxed{\text{コ}}\ 3}{7}\left(\frac{1}{\boxed{\text{サ}}\ 8}\right)^n + \frac{\boxed{\text{シ}}\ 4}{7} \quad (n \geqq 1)$$

となる．

考えられる状態



$k+1$ 回くり返して元の状態に戻っているのは次の2つの場合

(i) k 回くり返したとき元の状態に戻り，$k+1$ 回目に白球同士または赤球同士を交換する場合

(ii) k 回くり返したとき，元とは異なる状態になり，$k+1$ 回目に白球と赤球を交換する場合

よって，$P_{k+1} = P_k \cdot \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) + (1-P_k)\cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$

$$\therefore\ P_{k+1} = \frac{5}{8}P_k + \frac{1}{2}(1-P_k)$$ //

よって，$P_{k+1} = \frac{1}{8}P_k + \frac{1}{2}$

$$\therefore\ P_{k+1} - \frac{4}{7} = \frac{1}{8}\left(P_k - \frac{4}{7}\right)$$

ここで，$P_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$ より，

数列 $\left\{P_n - \frac{4}{7}\right\}$ は初項 $\frac{5}{8} - \frac{4}{7} = \frac{3}{56}$，公比 $\frac{1}{8}$ の等比数列

$$\therefore\ P_n - \frac{4}{7} = \frac{3}{56}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ P_n = \frac{3}{7}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{4}{7}$$ //