鳥取環境大学

2016年 環境・経営 第5問

数理 石井K

5 Aは自然数とする．数列$\{a_n\}$は初項1，公比$\frac{6}{5}$の等比数列とする．また，数列$\{b_n\}$は$b_1 = A$，$b_n = A \times \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$によって定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 数列$\{b_n\}$の一般項をAとnを用いた式で表せ．

(2) $10 \times a_{10}$がb_{10}よりも小さいとき，Aがとり得る値の最小値を求めよ．

ただし，$\frac{19}{100} < \left(\frac{5}{6}\right)^9 < \frac{1}{5}$である．

(1) $a_n = 1 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

$$b_n = A \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} + \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{6}{5}} \quad (n \geqq 2)$$

$$= A \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} + 5\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

$$= \underline{(A+5) \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} - 5}$$ //

これは $n=1$ のときも成り立っている．

(2) $10 \times a_{10} < b_{10} \iff 10 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^9 < (A+5) \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^9 - 5$

$$\iff (A-5) \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^9 > 5$$

$$\iff A - 5 > 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$$

$$\iff A > 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + 5$$

ここで，$\frac{19}{100} < \left(\frac{5}{6}\right)^9 < \frac{1}{5}$ より，$\underbrace{\frac{95}{100} + 5}_{=5.95} < 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + 5 < 6$

よって，Aは自然数より，最小値は $\underline{A = 6}$ //