



2013年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第3問

3 次の各問いに答えよ.

(1) 三角形 ABC の垂心を H とする. 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} = \vec{HC} \cdot \vec{HA}$$

ただし, 三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる. この点を三角形の垂心という.

(2) 次の (i), (ii) に答えよ.

(i) 自然数  $n$  に対して自然数  $a_n$  を次のように定義する.

$$a_n = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1$$

このとき, すべての自然数  $k$  に対して  $(2k)! = 2^k k! a_k$  が成り立つ. このことを証明せよ.

(ii) すべての自然数  $n$  に対して,  $2^n!$  は  $2^{(2^n-1)}$  で割り切れる. このことを数学的帰納法で証明せよ.