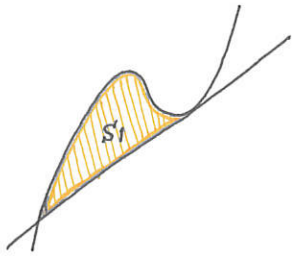
2014年 理系 第5問

$\boxed{5}$ xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 + x^2 + 1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする．$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする．このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする．

(1) S_1 を求めよ．

(2) x_k を k を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k}$ を求めよ．



(1) $y' = 3x^2 + 2x$ より．P_0 における接線は $y = 5(x-1)+3$ すなわち．$y = 5x - 2$

$x^3 + x^2 + 1 - (5x-2) = 0 \iff (x-1)^2(x+3) = 0 \qquad \therefore P_1(-3, -17)$

$\therefore S_1 = \displaystyle\int_{-3}^{1} x^3 + x^2 + 1 - (5x-2)\,dx = \underline{\frac{64}{3}}$ //

(2) P_{k-1} における接線は．$y = (3x_{k-1}^2 + 2x_{k-1})(x - x_{k-1}) + x_{k-1}^3 + x_{k-1}^2 + 1$

すなわち．$y = (3x_{k-1}^2 + 2x_{k-1})x - 2x_{k-1}^3 - x_{k-1}^2 + 1$

$\therefore x^3 + x^2 + 1 - \{(3x_{k-1}^2 + 2x_{k-1})x - 2x_{k-1}^3 - x_{k-1}^2 + 1\} = 0$

$\iff x^3 + x^2 - (3x_{k-1}^2 + 2x_{k-1})x + 2x_{k-1}^3 + x_{k-1}^2 = 0$

解と係数の関係より．$2x_{k-1} + x_k = -1$

$\therefore x_k + \frac{1}{3} = -2\left(x_{k-1} + \frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{x_k + \frac{1}{3}\right\}$ は．初項 $x_0 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$，公比 -2 の等比数列となる．

$\therefore x_k + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\cdot(-2)^k \qquad \therefore \underline{x_k = \frac{4}{3}\cdot(-2)^k - \frac{1}{3}}$ //

(3) $S_k = \left|\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2(x - x_k)\,dx\right|$

$= \frac{1}{12}(x_k - x_{k-1})^4$ 　$\frac{1}{12}$公式より．

(2)より．$x_k = -2x_{k-1} - 1$ なので．

$S_k = \frac{1}{12}(-3x_{k-1} - 1)^4$

$= \frac{1}{12}\{(-2)^{k+1}\}^4$

$= \frac{2^{4k+2}}{3}$

$= \frac{4}{3}\cdot 16^k$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k} = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^k$

$= \frac{3}{4}\cdot\dfrac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}}$

$= \underline{\frac{1}{20}}$ //