0002211458877999

山形大学

2016年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=2a_n+3n-3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとき，次の問に答えよ．

(1) $b_n=a_n+3n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．このとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) すべての自然数 n に対し，$a_n \neq 0$ であることを示せ．

(4) 次の式で定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

$$c_1=8,\quad c_{n+1}=\frac{c_n}{nc_n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(5) 次の式で定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

$$d_1=-8,\quad d_{n+1}=\frac{a_{n+1}d_n}{nd_n+a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a_{n+1}+3(n+1)=2a_n+6n$

$\therefore\ \underline{b_{n+1}=2b_n}$ //

(2) $\{b_n\}$ は初項 $a_1+3=2$，公比2の等比数列より．$b_n=2^n$ $\therefore\ \underline{a_n=2^n-3n}$ //

(3) $a_n=0$ となる自然数 n が存在したと仮定する 背理法

そのとき．$2^n=3n$ となるが，両辺とも整数で

(左辺)は3の倍数ではない，(右辺)は3の倍数

$\therefore$ 矛盾．よって．すべての自然数 n に対し，$a_n \neq 0$ ▨

(4) 帰納的に $c_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ であるから

両辺．逆数をとり．$\dfrac{1}{c_{n+1}}=\dfrac{nc_n+1}{c_n}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{c_{n+1}}=\dfrac{1}{c_n}+n$

$\therefore\ n\geqq 2$ のとき．$\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{c_1}+\sum_{k=1}^{n-1}k$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}n(n-1)$ $\quad\therefore\ \underline{c_n=\dfrac{8}{(2n-1)^2}}$ // これは $n=1$ のときも成り立っている．

(5) (3)より．$\dfrac{d_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{\frac{d_n}{a_n}}{n\cdot\left(\frac{d_n}{a_n}\right)+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，$\dfrac{d_1}{a_1}=8$

(4)より．$\dfrac{d_n}{a_n}=\dfrac{8}{(2n-1)^2}$ $\quad\therefore\ \underline{d_n=\dfrac{8(2^n-3n)}{(2n-1)^2}}$ //