富山大学

2014年 第2問

$\begin{smallmatrix}2 & & +1\\ 1 & \times & -1\end{smallmatrix}$

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で方程式 $\cos 2x - \cos x = 0$ の解を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で2つの曲線 $y = \cos 2x$ と $y = \cos x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(3) (2)の図形を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

(1) $2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0 \qquad \therefore (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 1, -\frac{1}{2}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ であるから, $\underline{x = 0, \frac{2}{3}\pi}$ //

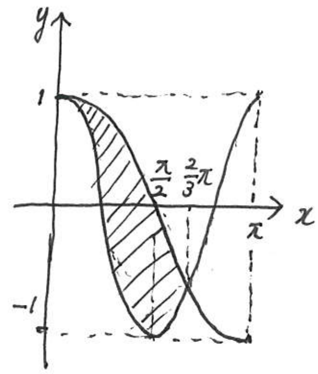
(2)

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos x - \cos 2x \, dx$$

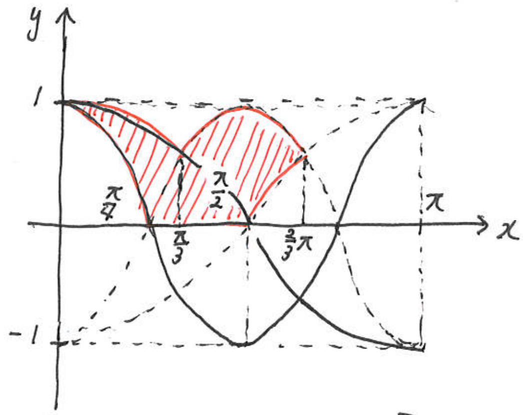
$$= \left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \ //$$



(3) 右図の赤線は(2)を x 軸に関して折り返したもの.



$$\therefore V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi \cdot \cos^2 x \, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \pi \cdot \cos^2 2x \, dx$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \cdot \cos^2 2x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos^2 x \, dx$$

$$= \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} - \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$-\pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16}\right) - \pi\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$-\pi\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \underline{\frac{\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi}{8}} \ //$$