富山大学

2016年 工学部・理学部（その他） 第3問

数理 石井K

3 次の条件（ア），（イ）を満たす複素数 z を考える．

（ア） $z+\dfrac{i}{z}$ は実数である

（イ） z の虚部は正である

ただし，i は虚数単位である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $r=|z|$ とおくとき，z を r を用いて表せ．

(2) z の虚部が最大となるときの z を求めよ．

(1) $r=|z|$ とおくと (イ) より，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ と表せる

このとき，

$$z+\frac{i}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{i}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{i}{r}\cdot(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(r\cos\theta+\frac{1}{r}\sin\theta\right)+i\left(r\sin\theta+\frac{1}{r}\cos\theta\right)$$

∴虚部は $r\sin\theta+\dfrac{1}{r}\cos\theta$ で (ア) より，$r\sin\theta+\dfrac{1}{r}\cos\theta=0$ … (＊)

∴ $r\sin\theta=-\dfrac{1}{r}\cos\theta$

両辺2乗して，$r^2\sin^2\theta=\dfrac{1}{r^2}\cos^2\theta$

$r^4\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$　　$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ なので，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{r^4+1}}$

(＊) に代入して，$\cos\theta=-\dfrac{r^2}{\sqrt{r^4+1}}$

∴ $z=r\left(-\dfrac{r^2}{\sqrt{r^4+1}}+\dfrac{i}{\sqrt{r^4+1}}\right)$　　∴ $\underline{z=-\dfrac{r^3}{\sqrt{r^4+1}}+\dfrac{r}{\sqrt{r^4+1}}i}$ //

(2) $f(r)=\dfrac{r}{\sqrt{r^4+1}}$ とおく $(r>0)$

$$f'(r)=\frac{\sqrt{r^4+1}-r\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4r^3}{\sqrt{r^4+1}}}{r^4+1}=\frac{(1-r)(1+r)(1+r^2)}{\sqrt{r^4+1}\,(r^4+1)}$$

r	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(r)$		$+$	0	$-$
$f(r)$		↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘

∴増減表より z の虚部が最大となる z は $r=1$ のときで

$\underline{z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$ //