

2013年 第3問

3 a を $a > 2$ を満たす実数とし,

$$f(t) = \frac{\sin^2 at + t^2}{at \sin at}, \quad g(t) = \frac{\sin^2 at - t^2}{at \sin at} \quad \left(0 < |t| < \frac{\pi}{2a}\right)$$

とする. また, C を曲線 $x^2 - y^2 = \frac{4}{a^2} \left(x \geq \frac{2}{a}\right)$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 $(f(t), g(t))$ は, 曲線 C 上の点であることを示せ.
- (2) 点 $\left(\lim_{t \rightarrow 0} f(t), \lim_{t \rightarrow 0} g(t)\right)$ における曲線 C の法線の方程式を求めよ.
- (3) 曲線 C と (2) で求めた法線および x 軸とで囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(a)$ とする. $V(a)$ を a を用いて表せ. また, $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ.