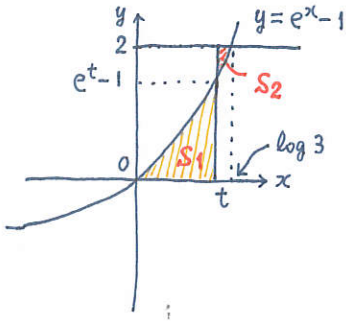
2010 年 第 6 問

6 座標平面上の曲線 $y = e^x - 1$ を C とする．曲線 C と 2 直線 $y = 0$, $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 C と 2 直線 $y = 2$, $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする．ただし，$0 < t < \log 3$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $S_1 = S_2$ となるときの t の値を求めよ．

(2) $S_1 + S_2$ が最小となるときの t の値を求めよ．



(1) $0 < t < \log 3$ より．$e^t - 1 < 2$ であるから．グラフは右のようになる．

$\therefore\ S_1 = \int_0^t e^x - 1\,dx = [e^x - x]_0^t = e^t - t - 1$

$S_2 = \int_t^{\log 3} 2 - (e^x - 1)\,dx = [3x - e^x]_t^{\log 3} = e^t - 3t + 3\log 3 - 3$

$\therefore$ $S_1 = S_2$ のとき．$e^t - t - 1 = e^t - 3t + 3\log 3 - 3$

$\therefore\ \underline{t = \frac{3}{2}\log 3 - 1}$ //

(2) $f(t) = S_1 + S_2$ とおくと，

$f(t) = 2e^t - 4t + 3\log 3 - 4$

$\therefore\ f'(t) = 2e^t - 4 = 2(e^t - 2)$

$\therefore$ $f'(t) = 0$ となるのは．$t = \log 2$ のとき．

t	(0)	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	$(\log 3)$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$\log\frac{27}{16}$	↗	

右の増減表より．

$S_1 + S_2$ が最小となるのは $\underline{t = \log 2\ のとき}$ //