

2012年第2問

2 区間 $0 \leq x \leq \pi$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、定積分

$$I = \int_0^{\pi} \{t \sin x - f(x)\}^2 dx \quad (t \text{ は実数})$$

を考える。定数 c_1, c_2, c_3 を

$$c_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx, \quad c_2 = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx, \quad c_3 = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

(1) I を、 t および c_1, c_2, c_3 を用いて表せ。

(2) c_1 の値を求めよ。

以下では、 I を最小にする t の値を t_0 とし、その最小値を I_0 とする。

(3) t_0 を c_2 を用いて表せ。また、 I_0 を c_2, c_3 を用いて表せ。

(4) 次の定積分 A, B の値を求めよ。

$$A = \int_0^{\pi} x \sin x dx, \quad B = \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

(5) $f(x) = x(\pi - x)$ のとき、 c_2, c_3 および I_0 の値をそれぞれ求めよ。