0001831548618999

徳島大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) 等式 $\sin^4 x\cos^2 x+\cos^4 x\sin^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x$ が成り立つことを示せ．

(2) $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくことにより，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$ が成り立つことを示せ．

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx$ の値を求めよ．

(1) (左辺) $=\sin^2 x\cos^2 x(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{=1})$

$=\frac{1}{4}\cdot(2\sin x\cos x)^2$

$=\frac{1}{4}\cdot\sin^2 2x$

$=$ (右辺) ▨

(2) $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと．

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\to 0$

，$dx=-dt$

$\therefore$ (左辺) $=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-dt)$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4 t\cdot\sin^2 t\cdot(-dt)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$

$=$ (右辺) ▨

(3) (1) より．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x+\cos^4 x\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2x\,dx$

(2) より．$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{16}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{\pi}{32}}$ //