2014年 医学部 第2問

$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，

$$A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},\quad A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $b_{n+1}=b_1a_n+d_1b_n$，$b_{n+1}=a_1b_n+b_1d_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) A^n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sqrt{{p_n}^2+{q_n}^2}}$ の値を求めよ．

(1) $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_n+c_1b_n & b_1a_n+d_1b_n \\ a_1c_n+c_1d_n & b_1c_n+d_1d_n \end{pmatrix}$

$\therefore\ b_{n+1}=b_1a_n+d_1b_n$ が成り立つ

また，$A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_n+b_1c_n & a_1b_n+b_1d_n \\ c_1a_n+d_1c_n & c_1b_n+d_1d_n \end{pmatrix}$

$\therefore\ b_{n+1}=a_1b_n+b_1d_n$ が成り立つ ■

(2) (1)と同様にして，$a_{n+1}=a_1a_n+c_1b_n=a_1a_n+b_1c_n$ $\quad\therefore\ c_n=0$

このとき，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ $\quad\therefore\ \{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列より，$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

同様に $d_{n+1}=3d_n$ $\quad\therefore\ d_n=3^n$

$\therefore$ (1)より，$\begin{cases} b_{n+1}=7\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+3b_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+7\cdot 3^n \end{cases}$ $\quad\therefore\ b_n=\frac{7}{8}\left\{3^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

以上より $A^n=\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \frac{7}{8}\left\{3^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ //

(3) $A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{35}{8}\cdot 3^{n+1}+\frac{13}{24}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 5\cdot 3^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\frac{35}{8}\cdot 3+\frac{13}{24}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}=\frac{8}{21}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sqrt{{p_n}^2+{q_n}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{21}\right)^2}}=\frac{21\sqrt{505}}{505}$ //