



2018年 理学部・医学部 第4問

4 次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

を求めよ。

(2) 正の整数 n に対して、 $S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (-x^2)^k$ とおく。このとき、任意の実数 x に対して、

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| \leq x^{2(n+1)}$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2) の $S_n(x)$ に対して、

$$\left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S_n(x) dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq 3^{-n}$$

を示せ。

(4) (1), (3) の結果を用いて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$$

を求めよ。