

2015年 第3問

 数理
石井K

 3 a を実数として、次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0 \\ ax^2 - (a+1)x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0 \iff (x-a)(x-2) \leq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$ax^2 - (a+1)x + 1 \leq 0 \iff (ax-1)(x-1) \leq 0 \quad \leftarrow a=0 \text{ のときも含まれる。} \quad \dots \textcircled{2}$$

(i) $a=0$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より, } 0 \leq x \leq 2 \quad \textcircled{2} \text{ より, } x \geq 1 \quad \text{よって, } 1 \leq x \leq 2$$

(ii) $a = \frac{1}{2}$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より, } \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \quad \textcircled{2} \text{ より } 1 \leq x \leq 2 \quad \text{よって, } 1 \leq x \leq 2$$

× (iii) $a=1$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より, } 1 \leq x \leq 2 \quad \textcircled{2} \text{ より } x=1 \quad \text{よって } x=1$$

(iv) $a=2$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より } x=2, \quad \textcircled{2} \text{ より } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \text{よって 解なし}$$

(v) $a < 0$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より, } a \leq x \leq 2 \quad \textcircled{2} \text{ より } x \leq \frac{1}{a}, 1 \leq x$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ のとき, } a \leq x \leq \frac{1}{a}, 1 \leq x \leq 2$$

$$-1 < a < 0 \text{ のとき, } 1 \leq x \leq 2$$

(vi) $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より, } a \leq x \leq 2 \quad \textcircled{2} \text{ より } 1 \leq x \leq \frac{1}{a} \quad \therefore 1 \leq x \leq 2$$

(vii) $\frac{1}{2} < a < 1$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より, } a \leq x \leq 2 \quad \textcircled{2} \text{ より } 1 \leq x \leq \frac{1}{a} \quad \therefore 1 \leq x \leq \frac{1}{a}$$

(viii) $1 < a < 2$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より } a \leq x \leq 2 \quad \textcircled{2} \text{ より } \frac{1}{a} \leq x \leq 1 \quad \therefore \text{解なし}$$

(ix) $a > 2$ のとき $\textcircled{1}$ より $2 \leq x \leq a$, $\textcircled{2}$ より $\frac{1}{a} \leq x \leq 1$ \therefore 解なし

(i) ~ (ix) より,

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 & (-1 < a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ a \leq x \leq \frac{1}{a}, 1 \leq x \leq 2 & (a \leq -1 \text{ のとき}) \\ \text{解なし} & (a > 1 \text{ のとき}) \\ 1 \leq x \leq \frac{1}{a} & (\frac{1}{2} < a \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases} //$$