

2011年第4問

4 実数を成分に持つ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ とベクトル $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $b \neq 0$ とする。

(1) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、 $AP = \alpha P$ と $y > 0$ を満たす α と y を求めよ。

(2) 次の3条件を満たす β, z, w を求めよ。

$$AQ = \beta Q, \quad z^2 + w^2 = 1, \quad z < w$$

(3) (1) と (2) で定められた $\alpha, \beta, x, y, z, w$ を用いて、次式を計算せよ。

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \end{pmatrix}$$

(4) (3) の結果を用いて、 A^n を求めよ。ただし、 n は1以上の自然数とする。