0001046543598999

宮城教育大学

2012年 教育学部（中等数学） 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ は微分可能で，導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．$p(x)=xe^{2x}$ とおくとき，$f(x)$ は

$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt = p(x)$$

を満たしている．このとき次の問いに答えよ．

(1) $f(0)=p'(0)$ を示せ．

(2) $f'(x)=p(x)+p''(x)$ を示せ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(1) $\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt = p(x) \iff \int_0^x f(t)\cdot(\cos x\cos t+\sin x\sin t)\,dt = p(x)$

$\iff \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt = p(x) \quad \cdots(*)$

(*)の両辺をxで微分して，

$-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt + \cos x\cdot f(x)\cos x + \cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt + \sin x\cdot f(x)\sin x = p'(x)$

$\therefore (\cos^2 x+\sin^2 x)\cdot f(x) - \sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt + \cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt = p'(x)$

$\therefore f(x) - \sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt + \cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt = p'(x) \quad \cdots(**)$

$x=0$ を (**) に代入して，$f(0)=p'(0)$ ■

(2) (**)を両辺xで微分して，

$f'(x) - \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt - \sin x\cdot f(x)\cos x - \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt + \cos x\cdot f(x)\sin x = p''(x)$

$\therefore f'(x) - \left\{\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right\} = p''(x)$

(*)より，$f'(x)=p(x)+p''(x)$ ■

(3) $p(x)=xe^{2x}$ より，$p'(x)=e^{2x}+x\cdot 2e^{2x}=(2x+1)e^{2x}$

$p''(x)=2e^{2x}+(2x+1)\cdot 2e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

$\therefore p(x)+p''(x)=(5x+4)e^{2x}$

(2)より，$f'(x)=(5x+4)e^{2x}$ $\quad \therefore f(x)=5\int xe^{2x}dx+4\int e^{2x}dx$

$\therefore f(x)=\frac{5}{2}xe^{2x}+\frac{3}{4}e^{2x}+C$ （Cは定数）

$f(0)=p'(0)$ より，$\frac{3}{4}+C=1 \quad \therefore C=\frac{1}{4} \quad \therefore \underline{f(x)=\frac{5}{2}xe^{2x}+\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}}$ //