



2014年理学部(数)第4問

4 α を実数とする. 2つの関数 $f(x) = e^{-x}(\sin x - \cos x)$ と $g(x) = \alpha e^{-x}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $\int f(x) dx = -e^{-x} \sin x + C$ であることを示せ. ただし, C は積分定数である.
 (2) すべての $x \geq 0$ について $f(x) \leq g(x)$ が成り立つような α の値の最小値を求めよ.
 (3) α を (2) で求めた最小値とする. 曲線 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) と曲線 $y = g(x)$ ($x \geq 0$) との共有点の x 座標を小さい方から順に a_0, a_1, a_2, \dots とし, n が自然数であるとき,

$$S_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \left\{ g(x) - \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \right\} dx$$

とする. このとき, S_n を求めよ.

- (4) (3) で求めた S_n について, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ.