鳥取大学

2016年 医（医） 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 実数 β は $\beta>1$ を満たす定数とする．$x>0$ に対し関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{\log x}{x^\beta}$ で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) $t>0$ ならば $\dfrac{t^2}{2}<e^t$ であることを用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(3) $a>1$ を満たす実数 a に対して，$I(a)=\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx$ とおくとき，$I(a)$ を求めよ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^\beta-(\log x)\cdot\beta x^{\beta-1}}{x^{2\beta}}=\dfrac{1-\beta\log x}{x^{\beta+1}}$

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\beta}}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\frac{1}{\beta e}$	↘

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき

右の増減表より，$\underline{極大値\ \dfrac{1}{\beta e}\ (x=e^{\frac{1}{\beta}}\ のとき)}$ //

(2) $x>1$ のとき，$0<\dfrac{\log x}{x^\beta}$

$x>0$ のとき，$\dfrac{x^2}{2}<e^x \iff 2\log x-\log 2<x$

$\iff \dfrac{\log x}{x^\beta}<\dfrac{\log 2}{2x^\beta}+\dfrac{1}{2x^{\beta-1}}$　両辺 $2x^\beta$ で割った

よって，$x>1$ のとき，$0<\dfrac{\log x}{x^\beta}<\dfrac{\log 2}{2x^\beta}+\dfrac{1}{2x^{\beta-1}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log 2}{2x^\beta}+\frac{1}{2x^{\beta-1}}\right)=0$ より，はさみうちの原理から $\underline{\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0}$ //

(3) $I(a)=\displaystyle\int_1^a\left(\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right)'\log x\,dx$

$=\left[\dfrac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\log x\right]_1^a-\displaystyle\int_1^a\frac{x^{-\beta}}{1-\beta}\,dx$

$=\dfrac{a^{1-\beta}}{1-\beta}\log a-\left[\dfrac{x^{1-\beta}}{(1-\beta)^2}\right]_1^a$

$=\underline{\dfrac{a^{1-\beta}\log a}{1-\beta}+\dfrac{1-a^{1-\beta}}{(1-\beta)^2}}$ //

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}a^{1-\beta}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a^{\beta-1}}=0$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}a^{1-\beta}\log a=\lim_{a\to\infty}\frac{\log a}{a^\beta}\cdot a=0$　（$\because$ (2) より）

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)=\underline{\frac{1}{(1-\beta)^2}}$ //