



2011年 理工学部 第4問

4 整数  $a, b, c$  に対して, 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+c-b \end{pmatrix}$  をとる. 次の問いに答えよ.

(1) 行列  $Q = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix}$  に対して,

$$Q^3 - Q = \begin{pmatrix} s(s^2-1) & t(s^2+u^2+su-1) \\ 0 & u(u^2-1) \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(2) 整数  $x, y, z$  に対して, 行列  $R = \begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix}$  をとる. このとき, 行列  $\frac{1}{6}R^2$  の各成分が整数であることを示せ.

(3)  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおくと,  $B = PAP^{-1}$  を求めよ. さらに, 行列  $\frac{1}{6}(B^3 - B)^2$  の各成分が整数であることを示せ.

(4) 行列  $\frac{1}{6}(A^3 - A)^2$  の各成分が整数であることを示せ.