0001850639418999

富山大学

2014年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 微分可能な関数 $f(x)$ と2つの定数 p，q が次の条件を満たすとする．

「すべての実数 x，y に対して，$f(x+y)=pf(x)+qf(y)$ が成り立つ」

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(0)\neq 0$ とする．

(i) $p+q=1$ であることを示せ．

(ii) $f(x)$ は定数関数であることを示せ．

(2) $f(0)=0$ で $f(x)$ が定数関数でないとする．

(i) $p=1$ であることを示せ．

(ii) $a=f'(0)$ とするとき，$f(x)$ を a を用いて表せ．

(1) $f(x+y)=pf(x)+qf(y)$ $\cdots$ (*) に

(i)

$x=0$，$y=0$ を代入すると．

$f(0)=pf(0)+qf(0)$

$\therefore\ (1-p-q)f(0)=0$

$f(0)\neq 0$ より $p+q=1$ ■

(ii) (i) より．$f(x+y)-f(y)=pf(x)+qf(y)-f(y)$

$=0$

$\therefore$ 任意の x，y に対して，$f(x+y)=f(y)$ が成り立つので，$f(x)$ は定数関数 ■

(2)(i) (*) に $y=0$ 代入すると，

$f(x)=pf(x)+qf(0)$

$\therefore\ f(x)\cdot\{1-p\}=0$

$\therefore$ すべての x で $f(x)=0$

または．$p=1$ となるが，

$f(x)$ は定数関数ではないので

$p=1$ ■

(ii) (i) と同様に $x=0$ を代入することで

$q=1$ を得る．

$\therefore$ (*) 式は

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ となる．

$\therefore\ f(x+y)-f(y)=f(x)$．

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x+y)-f(y)}{(x+y)-y}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$\therefore\ f'(y)=f'(0)$

$\therefore\ f(x)=a\cdot x+C$ （C は定数）

$f(0)=0$ より．$C=0$ $\therefore$ $\underline{f(x)=ax}$ //