0002308181967999

富山大学

2016年 理学部（数学）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ の値を求めよ．

(2) 3以上の整数 n に対して，不等式

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}\,dx < \frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(1) $x = \cos\theta$ とおいて置換積分する

$dx = -\sin\theta\, d\theta$ ，
$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{6} \end{array}$

$$(与式) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\cdot(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}}\,_{//}$$

(2) $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，$n \geqq 3$ において，$\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^n}} < \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ より

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}\,dx < \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$< \frac{\pi}{6} \quad ▨$$