0002108271987999

広島市立大学

2015年 第4問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

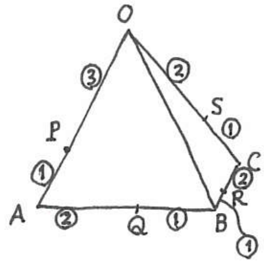
$\boxed{4}$ 1辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，OAを3：1に内分する点をP，ABを2：1に内分する点をQ，BCを1：2に内分する点をR，OCを2：1に内分する点をSとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{PR}$ および $\overrightarrow{QS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{PR}$ と $\overrightarrow{QS}$ のなす角を θ とするとき，θ は鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ．

(4) 線分PRと線分QSは交点をもつかどうかを調べよ．



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

同様に他も求めると．

$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}}$ //

(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$，$\overrightarrow{OS}=\frac{2}{3}\vec{c}$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$ //

$\underline{\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}}$ //

(3) $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS}=\left(-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{2}{9}|\vec{c}|^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{18}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}$

$=-\frac{1}{36}$

<0

$\therefore$ θは鈍角 ■

ポイント $\vec{x}$, $\vec{y}\neq\vec{0}$ が

$\vec{x}\cdot\vec{y}>0 \iff$ なす角は鋭角

$=0 \iff$ 直角

$<0 \iff$ 鈍角

(4). 交点Xが存在したと仮定し，背理法で示す．

Xは線分PR上にあるので，$\overrightarrow{OX}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OR}$ となる $s\ (0\leqq s\leqq 1)$ が存在する

Xは線分QS上にあるので，$\overrightarrow{OX}=(1-t)\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{OS}$ となる $t\ (0\leqq t\leqq 1)$ が存在する

$\therefore\ (1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{OS}$

2枚目へつづく

0002108271987999

広島市立大学

2015 年 第 4 問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4　1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において，OA を 3 : 1 に内分する点を P，AB を 2 : 1 に内分する点を Q，BC を 1 : 2 に内分する点を R，OC を 2 : 1 に内分する点を S とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{PR}$ および $\overrightarrow{QS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{PR}$ と $\overrightarrow{QS}$ のなす角を θ とするとき，θ は鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ．

(4) 線分 PR と線分 QS は交点をもつかどうかを調べよ．

(4) のつづき．

$$\therefore (1-s)\cdot\frac{3}{4}\vec{a}+s\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-(1-t)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)-t\cdot\frac{2}{3}\vec{c}=\vec{0}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}s-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}s-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}t\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{3}s-\frac{2}{3}t\right)\vec{c}=\vec{0}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は一次独立より．

$$\begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{3}{4}s-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t=0 & \cdots ① \\ \frac{2}{3}s-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}t=0 & \cdots ② \\ \frac{1}{3}s-\frac{2}{3}t=0 & \cdots ③\end{cases}$$

③より．$s=2t \cdots ③'$

②より．$s+t=1 \cdots ②'$

②′と③′より．$s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{1}{3}$

このとき．①の左辺は．

$$(\text{左辺})=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{36}$$

$$\neq 0$$

∴ ①は成り立たず，矛盾する．

∴ 線分 PR と線分 QS は交点をもたない ▨