富山大学

2016年 経済・人間発達科学 第1問

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} 2^n$ の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

$$\sum_{n=0}^{100} 2^n = \frac{1-2^{101}}{1-2} = 2^{101}-1$$

(別) $2^{100} < 2^{101}-1 < 2^{101}$ より

常用対数をとり考えてもよい.

ここで, 2^{101} と $2^{101}-1$ は同じ桁数である.

なぜなら, $2^{101}-1$ が m 桁, 2^{101} が $m+1$ 桁であると仮定すると,

$$2^{101} = 10^m$$

となるが, 左辺は5を素因数にもたず矛盾する.

よって, 2^{101} の桁数を求めればよい

$$10^{l-1} \leqq 2^{101} < 10^l \iff l-1 \leqq 101\log_{10} 2 < l$$

$$\iff l-1 \leqq 101 \cdot 0.3010 < l$$

$$\iff l-1 \leqq 30.401 < l$$

$$\iff l = 31$$

$\therefore$ $\underline{31\text{桁}}$ //