

2012年教育第1問

1 次の小問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 実数  $a, b$  が  $0 \leq a \leq \pi$ ,  $a < b$  をみたすとき,

$$I(a, b) = \int_a^b e^{-x} \sin x \, dx$$

とおく. ただし,  $e$  は自然対数の底とする.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} I(a, b) = 0$$

が成立するように  $a$  を定めよ.

(2) 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  は  $ad - bc = 2$  および  $a + d = 3$  をみたし, かつ, ある行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

に対して  $AB = BA$  をみたしている. ただし  $\alpha \neq \beta$  とする. このような行列  $A$  をすべて求めよ.

(3)  $c$  を正の実数として, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{3^n} \quad (n \geq 1), \quad a_0 = c$$

で定義される数列  $\{a_n\}$  を考える. このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  となるような  $c$  の範囲を求めよ.

(4) 実数  $t$  が  $1 \leq t \leq 2$  の範囲で動くとき,  $xy$  平面の直線

$$y = (3t^2 - 4)x - 2t^3$$

が通る範囲を  $H$  とする.  $H$  の内, 直線  $x = 1$  と  $x = \frac{20}{9}$  ではさまれる部分の面積を求めよ.