富山県立大学

2016年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) $z^n=1$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1$ の値を求めよ．

(3) $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)$ の値を求めよ．

(4) $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ．

(1) ド・モアブルの定理より，

$$z^n=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^n$$
$$=\cos\frac{2n\pi}{5}+i\sin\frac{2n\pi}{5}$$

$$\therefore\ z^n=1 \iff \frac{2n\pi}{5}=2k\pi \quad (k\text{は整数})$$
$$\iff n=5k$$

∴ 最小の正の整数 n は，$\underline{n=5}$ //

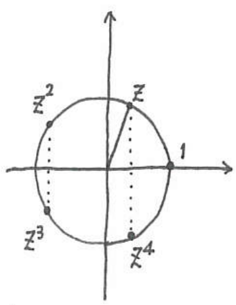
(2) $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=z^5-1$
$$=0 \quad (\because (1)より)$$

よって，$0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$z\neq1$ であることから，$\underline{z^4+z^3+z^2+z+1=0}$ //

(3) $(与式)=(1+z+z^2+z^3)(1+z^4+z^8+z^{12})$

$1+z+z^2+z^3+z^4=0$ と $z^5=1$ より

$$=-z^4\cdot(1+z^2+z^3+z^4)$$
$$=-z^4\cdot(-z)$$
$$=z^5$$
$$=\underline{1}\ //$$



(4) 右の図より，$z^4=\overline{z}$，$z^3=\overline{z^2}$

$$\therefore\ z+z^2+z^3+z^4=(z+\overline{z})+(z^2+\overline{z^2})$$
$$=2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}$$

一方，$z+z^2+z^3+z^4=-1$ より，

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=\underline{-\frac{1}{2}}\ //$$