

2010年医学部第4問

4 原点を O とする座標平面上の動点 P の位置ベクトル $\vec{OP} = (x, y)$ が、時刻 t の関数として、 $x = e^{-2t} \cos 2\pi t$, $y = e^{-2t} \sin 2\pi t$ で表されている。

(1) 点 P の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ の大きさは、 $|\vec{v}| = \square \sqrt{\square + \pi^2} e^{-2t}$ である。

(2) \vec{OP} と \vec{v} のなす角を α とするとき、 $\cos \alpha = \frac{\square}{\sqrt{\square + \pi^2}}$ であり、これは時刻 t によらない一定値である。

(3) n を自然数として、 $t = n - 1$ から $t = n$ までの間に点 P が動く道のり S_n は、

$$S_n = \sqrt{\square + \pi^2} (e^{\square} - \square) e^{-2n}$$

である。また、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sqrt{\square + \pi^2}$ である。

(4) $t = 0$ から $t = \frac{1}{4}$ までの間に点 P がえがく曲線と、 x 軸、 y 軸とで囲まれる図形の面積 I は、 $I = \int_a^b y dx = \int_{\frac{1}{4}}^0 y \frac{dx}{dt} dt$ で求められる。このとき $a = \square$, $b = \square$ で、 $I = \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-4t} \{ \sin \square * \pi t + \pi (1 - \cos \square * \pi t) \} dt$ である。