0001929360708999

獨協医科大学

2014 年 医学部 第 1 問　　1枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい．

(1) a を正の定数とし，x についての 2 つの不等式

$\log_3(x+2a)+\log_3(x+3a)<\log_3 10ax$ ……①

$\log_3(3x-4)+\log_3(3x+2)<2\log_9(6x-5)+1$ ……②

を考える．

①の解は

$\boxed{ア}\,a<x<\boxed{イ}\,a$　（ア：2，イ：3）

である．

②の解は

$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}<x<\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$　（ウ：4，エ：3，オ：7，カ：3）

である．

①，②をともに満たす実数 x が存在するとき，a のとり得る値の範囲は

$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}<a<\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$　（キ：4，ク：9，ケ：7，コ：6）

である．

(1) ①において，真数条件より，$x+2a>0$ かつ $x+3a>0$ かつ $10ax>0$

よって $x>0$ …③

このとき，$\log_3(x+2a)(x+3a)<\log_3 10ax$

$\therefore (x+2a)(x+3a)<10ax$

$\therefore x^2-5ax+6a^2<0$

$\therefore (x-2a)(x-3a)<0$

$\therefore \underline{2a<x<3a}$ // これは③をみたす．

つづきは2枚目へ．

(2) 放物線 $C: y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上に 2 点 P，Q がある．P，Q の x 座標をそれぞれ p，q としたとき，p，q は $q<p$ を満たす整数で，$p>0$，$p+q$ は正の偶数とする．

また，点 P における放物線 C の接線を ℓ，2 点 P，Q を通る直線を m とし，直線 ℓ，m が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α，β $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，2 直線 ℓ，m のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

$p=5$，$q=1$ のとき

$\tan\alpha=\boxed{サ}$，　$\tan\beta=\boxed{シ}$　（サ：5，シ：3）

であり

$\tan\theta=\dfrac{1}{\boxed{ス}}$　（ス：8）

である．

また，$\tan\theta=\dfrac{1}{7}$ を満たす整数 p，q の組 $(p,\ q)$ をすべてあげると，

$(p,\ q)=(\boxed{セ},\ \boxed{ソ})$，$(\boxed{タチ},\ \boxed{ツテ})$，$(\boxed{トナ},\ \boxed{ニヌネ})$　（セ：3，ソ：1，タチ：18，ツテ：−8，トナ：43，ニヌネ：−31）

である．ただし，$\boxed{セ}<\boxed{タチ}<\boxed{トナ}$ とする．

数理
石井K

(1) のつづき.

② において. 真数条件より. $3x-4>0$ かつ $3x+2>0$ かつ $6x-5>0$

$\therefore\ x>\frac{4}{3}\cdots$ ④

このとき. $\log_3(3x-4)(3x+2)<\log_9(6x-5)^2\cdot 9$

底の変換公式より. $\log_9(6x-5)^2\cdot 9=\dfrac{\log_3 9(6x-5)^2}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\log_3 9(6x-5)^2$

④より. $6x-5>0$ なので. $\log_9(6x-5)^2\cdot 9=\log_3 3(6x-5)$

$\therefore\ \log_3(3x-4)(3x+2)<\log_3 3(6x-5)$

$\therefore\ 9x^2-6x-8<18x-15$

$\therefore\ 9x^2-24x+7<0$

$(3x-7)(3x-1)<0$

$\therefore\ \frac{1}{3}<x<\frac{7}{3}$

④ とあわせて. $\underline{\frac{4}{3}<x<\frac{7}{3}}$ //

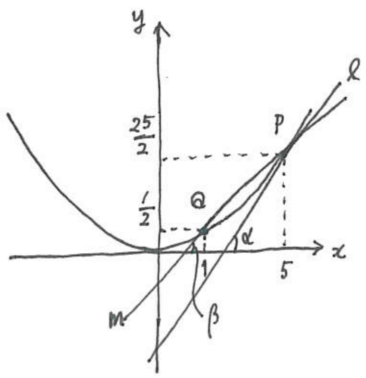
① と ② をともにみたす実数が存在するとき.

$3a>\frac{4}{3}$ かつ $2a<\frac{7}{3}$ $\iff$ $\underline{\frac{4}{9}<a<\frac{7}{6}}$ //

(2) $p=5,\ q=1$ のとき. $P\left(5,\frac{25}{2}\right),\ Q\left(1,\frac{1}{2}\right)$

$y'=x$ より. $l: y=5(x-5)+\frac{25}{2}$

$\therefore\ \underline{\tan\alpha=5}$ //



$PQ: y=\dfrac{\frac{25}{2}-\frac{1}{2}}{5-1}(x-5)+\frac{25}{2}$

$\therefore\ \underline{\tan\beta=3}$ //

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5-3}{1+5\cdot 3}=\underline{\frac{1}{8}}$ //

数理 石井K

(2)のつづき.

一般のp, qでも同様に考えると,

$$\tan\alpha = p,\quad \tan\beta = \frac{\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}q^2}{p-q} = \frac{p+q}{2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{p-\frac{p+q}{2}}{1+p\cdot\frac{p+q}{2}} = \frac{p-q}{2+p(p+q)}$$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{7}$ より, $7(p-q) = 2+p(p+q)$

$$\therefore q = \frac{-p^2+7p-2}{p+7}$$

$$\therefore q = \frac{(p+7)(-p+14)-100}{p+7}$$

$$\therefore q = -p+14-\frac{100}{p+7}$$

$$\begin{array}{r|l} & -p+14 \\ \hline p+7 & -p^2+7p-2 \\ & -p^2-7p \\ \hline & 14p-2 \\ & 14p+98 \\ \hline & -100 \end{array}$$

p, qは整数より, $p+7 = 10, 20, 25, 50, 100$

$\therefore (p, q) = (3, 1), (13, -4), (18, -8), (43, -31), (93, -80)$

このうち, $p+q$が正の偶数となるのは,

$(p, q) = \underline{(3, 1), (18, -8), (43, -31)}$ //

逆に, これらのとき条件をみたす.