

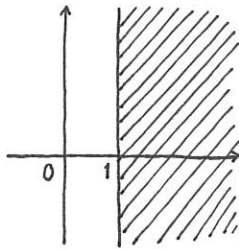
2016年 第7問

 数理  
石井

7  $a$  を 1 以上の実数,  $b$  を実数,  $i$  を虚数単位とし, 複素数  $z$  を  $z = a + bi$  とする. また, 複素数  $w$  を  $w = \frac{1}{z}$  とする. 以下の問いに答えよ.

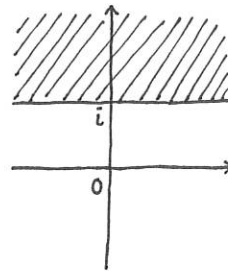
- (1) 複素数  $z$  が存在する領域を複素数平面上に図示せよ. また,  $iz$  が存在する領域を複素数平面上に図示せよ.  
 (2)  $x, y$  を実数とし,  $w = x + yi$  とおくと,  $a$  を  $x$  および  $y$  を用いて表せ.  
 (3)  $w$  が存在する領域を複素数平面上に図示せよ.

(1)



$z$  が存在する領域  
 (ただし境界線も含む)

領域を原点を中心に  
 反時計まわりに  $90^\circ$  回転  
 →



$iz$  が存在する領域  
 (ただし境界線も含む)

(2)  $w = \frac{1}{z}$

$$= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\therefore x = \frac{a}{a^2+b^2} \dots \textcircled{1}, \quad y = -\frac{b}{a^2+b^2} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して, } x = a(x^2 + y^2) \quad \therefore a = \frac{x}{x^2 + y^2} //$$

(3) (2) と  $a \geq 1$  より,  $\frac{x}{x^2 + y^2} \geq 1$

$$\therefore x^2 - x + y^2 \leq 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

また  $\textcircled{1}$  と  $a \geq 1$  より,  $x > 0$

$w$  が存在する領域は右図の斜線部分

ただし境界線は含み, 原点は除く,

