0001834095618999

富山大学

2014年 薬学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x > -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示せ．

(2) $f(x) = x^2 \log x \ (x > 0)$ とおく．$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = 0$ を示せ．

(3) $f(x)$ の増減および凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) $I(t) = \displaystyle\int_t^2 f(x)\,dx \ (t > 0)$ とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{t \to +0} I(t)$ を求めよ．

(1) $g(x) = \log x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおくと，$g'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$2(1-\log 2) > 0$
極小

$\therefore$ $g(x)$ の最小値は $g\left(\frac{1}{4}\right) = 2(1-\log 2) > 0$

$\therefore$ $x > 0$ において $g(x) > 0$ すなわち，$\log x > -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ■

(2) (1) より，$x > 0$ のとき，$x^2 \log x > -x\sqrt{x}$ が成り立つ

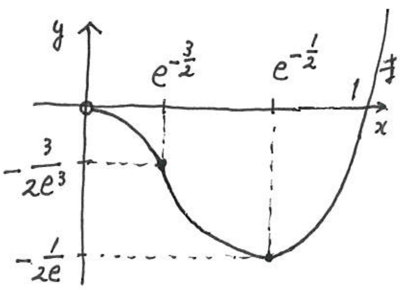
$\therefore$ $0 < x < 1$ において，$-x\sqrt{x} < x^2 \log x < 0$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{x \to +0} -x\sqrt{x} < \lim_{x \to +0} x^2 \log x < \lim_{x \to +0} 0$

$\displaystyle\lim_{x \to +0} -x\sqrt{x} = 0$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = 0$ ■

(3) $f'(x) = 2x\log x + x = x(2\log x + 1)$，$f''(x) = 2\log x + 1 + x \cdot \dfrac{2}{x}$

$= 2\log x + 3$



また，明らかに $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	(0)	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$-\dfrac{3}{2e^3}$ 変曲点，$-\dfrac{1}{2e}$ 極小

(4) $I(t) = \displaystyle\int_t^2 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \log x\, dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{3}\log x\right]_t^2 - \displaystyle\int_t^2 \frac{x^2}{3}\,dx$

$= \dfrac{8}{3}\log 2 - \dfrac{t^3}{3}\log t - \dfrac{8}{9} + \dfrac{t^3}{9}$

(2) より，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^2 \log x = 0$ なので

$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^3 \log x = 0$ を用いた．

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{t \to +0} I(t) = \underline{\frac{8}{9}(3\log 2 - 1)}$ //