富山県立大学

2015年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ.

(1) 等式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ が成り立つことを示せ.

(2) 方程式 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ が $\sin\frac{\pi}{18}$ を解にもつことを示せ.

(3) 方程式 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ のすべての解が実数であることを示せ.

(1) $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$

$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$

$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ ▨

(2) $x = \sin\frac{\pi}{18}$ を $8x^3-6x+1$ に代入すると,

$8x^3-6x+1 = 8\sin^3\frac{\pi}{18} - 6\sin\frac{\pi}{18} + 1$

$= -2\left(3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18}\right) + 1$

$= -2\sin\frac{\pi}{6} + 1$ （∵(1)の結果より）

$= 0$

∴ $x = \sin\frac{\pi}{18}$ は $8x^3-6x+1=0$ の解である ▨

(3) $f(x) = 8x^3-6x+1$ とおくと, $f'(x) = 24x^2-6 = 24\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

∴ $f'(x) = 0$ となるのは, $x = \pm\frac{1}{2}$

増減表は右のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

∴ グラフは右下のようになる

∴ $f(x)=0$ のすべての解（3個）は

実数である ▨