0001859720418999

富山県立大学

2014年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ αは実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$について，次の問いに答えよ．

(1) $A=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$と表すとき，$r$，$\theta$の値を求めよ．ただし，$r>0$，$0<\theta<\pi$とする．

(2) $B^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$となることを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) $A_n=r_n\begin{pmatrix}\cos\theta_n & -\sin\theta_n\\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\end{pmatrix}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$を$(A_n)^n=A$により定める．ただし，$r_n>0$，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{n}$とする．このとき，$r_n$，$\theta_n$を$n$の式で表せ．

(4) (3)で定めたA_nを用いて行列T_nを$T_n=nA_n$により定める．点Oを原点とする座標平面上において，T_nの表す1次変換によって点$(1, 0)$が移される点をP_nとするとき，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$の面積$S_n$を$n$の式で表せ．また，極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ．

(1) $A=2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ $\therefore \underline{r=2,\ \theta=\frac{\pi}{3}}$ //

(2) 数学的帰納法で示す．(i) $n=1$のとき．$B^1=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$となり成立．

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると．$B^k=\begin{pmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{pmatrix}$

$\therefore B^{k+1}=B\cdot B^k=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos k\alpha-\sin\alpha\sin k\alpha & -\sin k\alpha\cos\alpha-\cos k\alpha\sin\alpha\\ \sin\alpha\cos k\alpha+\cos\alpha\sin k\alpha & -\sin\alpha\sin k\alpha+\cos\alpha\cos k\alpha\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha\\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha\end{pmatrix}$ $\therefore$ $n=k+1$も成立する

(i)，(ii)より $n=1,2,3,\cdots$で与式は成り立つ ■

(3) (2)より．$(A_n)^n=(r_n)^n\begin{pmatrix}\cos n\theta_n & -\sin\theta_n\cdot n\\ \sin n\theta_n & \cos\theta_n\cdot n\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$

$\therefore \underline{r_n=\sqrt[n]{2},\ \theta_n=\frac{\pi}{3n}}$ // $(\because r_n>0,\ 0<\theta_n<\frac{\pi}{n})$

(4) $n\cdot A_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=n\cdot\sqrt[n]{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3n} & -\sin\frac{\pi}{3n}\\ \sin\frac{\pi}{3n} & \cos\frac{\pi}{3n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\sqrt[n]{2}\cos\frac{\pi}{3n}\\ n\sqrt[n]{2}\sin\frac{\pi}{3n}\end{pmatrix}$ ← P_n

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\left|n(n+1)\sqrt[n]{2}\sqrt[n+1]{2}\sin\frac{-1}{3n(n+1)}\pi\right|=\underline{\frac{1}{2}n(n+1)\sqrt[n]{2}\sqrt[n+1]{2}\sin\frac{\pi}{3n(n+1)}}$ //

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}\sqrt[n]{2}\sqrt[n+1]{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3n(n+1)}}{\frac{\pi}{3n(n+1)}}\cdot\pi=\underline{\frac{\pi}{6}}$ //