

2010年工学部第3問

 数理
石井K

3 1個のさいころを n 回続けて投げるとき、1の目が奇数回出る確率 p_n について、次の問いに答えよ。ただし、 n は自然数である。

- (1) p_1, p_2, p_3 を求めよ。
 (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$ を示せ。

(1) $p_1 \cdots$ 1回投げて1の目が出る確率 よって、 $p_1 = \frac{1}{6}$ //

$p_2 \cdots$ 2回投げてちょうど1回、1の目が出る確率 よって、 $p_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2C_1 = \frac{5}{18}$ //

$p_3 \cdots$ 3回投げて1の目がちょうど1回または3回とも出る確率

よって、 $p_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 3C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{19}{54}$ //

(2) n 回投げて1の目が奇数回 \rightarrow $n+1$ 回目は1以外の目。

\leq 偶数回 \rightarrow \leq 1の目。

であればよいから、

$$p_{n+1} = \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} (1 - p_n) \quad \therefore p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6} //$$

$$(3) p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

\therefore 数列 $\{ p_n - \frac{1}{2} \}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列

$$\therefore p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = \frac{1}{2} \quad \square$$