



2012年理系第3問

3 次の問いに答えよ.

(1) $f(t)$ を $0 \leq t \leq 1$ で連続な関数とする. $\tan x = t$ において,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 f(t) dt$$

であることを示せ.

(2) (1) を用いて, 0 以上の整数 n に対し, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx$ の値を求めよ. また,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \leq \frac{1}{n+1}$$

を示せ.

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ を満たす x に対し,

$$\frac{1 - \tan^2 x + \tan^4 x - \cdots + (-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1 - (-1)^{n+1} \tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ.

(4) (2) と (3) を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ.